# LK-Klausur NRW 2011: Kafferösterei

Drei Kaffeeröstereien konkurrieren mit ihren Kaffeesorten $A$, $B$ und $C$ um die Gunst der Käufer, wobei folgendes monatliche Wechselverhalten der Käufer zu beobachten ist:

20 % der Käufer der Sorte $A$ wechseln zu Sorte $C$,

10 % der Käufer der Sorte $B$ wechseln zu Sorte $A$,

10 % der Käufer der Sorte $B$ wechseln zu Sorte $C$,

10 % der Käufer der Sorte $C$ wechseln zu Sorte $A$,

20 % der Käufer der Sorte $C$ wechseln zu Sorte $B$.

Gehen Sie davon aus, dass die übrigen Käufer bei der gewählten Kaffeesorte bleiben und sich das Wechselverhalten über längere Zeit nicht ändert.

a) Skizzieren Sie das monatliche Wechselverhalten der Käufer in einem Übergangsdiagramm und beschreiben Sie, inwiefern die Übergangsmatrix $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$ das dargestellte Wechselverhalten der Käufer abbildet. (8P)

b) Berechnen Sie die Verteilung nach einem Monat, wenn vorher 150.000 Sorte $A$, 300.000 Sorte $B$ und 450.000 Sorte $C$ gekauft haben. (3P)

c) Berechnen Sie $P^6$ und interpretieren Sie die Komponente in der dritten Zeile und ersten Spalte im Sachzusammenhang. (5P)

d) Die Matrix $P$ aus Teil a) hat die besondere Eigenschaft, dass alle Komponenten größer oder gleich Null sind und alle Spalten die Summe 1 haben. Eine solche Matrix wird stochastisch genannt. (6P)

Interpretieren Sie diese Eigenschaft im Sachzusammenhang und beurteilen Sie die Angemessenheit der dahinter liegenden Modellannahme für das Wechselverhalten der Käufer zwischen den drei Kaffeesorten.

Eine weitere Kaffeerösterei bietet eine vierte Kaffeesorte $D$ an. Das Wechselverhalten der Käufer wird durch die Matrix $Q = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$ beschrieben, wobei eine Verteilung der Käufer auf die Sorten $A$, $B$, $C$ und $D$ durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \\ V_D \end{pmatrix}$ gegeben ist.

e) (1) Skizzieren Sie das monatliche Wechselverhalten der Käufer in einem Übergangsdiagramm. (19P)

(2) Zeigen Sie, dass keine Käufer innerhalb von zwei Monaten von Sorte $A$ zu $B$ wechseln.

(3) Bestimmen Sie für die Übergangsmatrix $Q$ die prozentuale Verteilung der Käufer, die sich im Folgemonat nicht ändert.
Interpretieren Sie diese Verteilung im Hinblick auf das langfristige Käuferverhalten.

f) Durch mangelnde Betreuung der Stammkunden verliert die Rösterei, die Sorte $C$ anbietet, Käufer an die übrigen Röstereien, so dass sich die entsprechenden Übergangsquoten ändern. Alle anderen Übergangsquoten bleiben gleich. (9P)

Die Verteilung ändert sich in einem Monat von (400.000 | 200.000 | 400.000 | 100.000) zu (400.000 | 300.000 | 200.000 | 200.000).

(1) Begründen Sie, dass dieses Verhalten durch eine Matrix des Typs

$$Q' = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & x & 0,2 \\ 0 & 0,9 & y & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 1-(x+y+z) & 0 \\ 0 & 0 & z & 0,4 \end{pmatrix}$$ beschrieben werden kann.

(2) Ermitteln Sie die neuen Übergangsquoten.

Zusatzaufgabe für Fleißbienchen, haha:
Dafür stellen wir uns nochmal 1. Situation vor, nur mit den drei Kaffeesorten A, B und C.

g) Abweichend von der bisherigen Situation wird angenommen, dass die Kaffeesorte A nur eine bestimmte, stets gleich bleibende Käuferschicht anspricht, so dass ein Wechsel der Käufer ausschließlich zwischen den Sorten B und C stattfindet.

(1) Begründen Sie, dass dieses Wechselverhalten der Käufer durch eine Matrix des Typs

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 1-w \\ 0 & 1-v & w \end{pmatrix} \text{ mit } 0 < v < 1 \text{ und } 0 < w < 1$$

beschrieben werden kann.

(2) Bei einer Zählung wird beobachtet, dass von den Käufern, die eine der Sorten B oder C kaufen, 40 % die Sorte B, 60 % die Sorte C kaufen, während im darauf folgenden Monat jeweils 50 % die Sorte B und 50 % die Sorte C kaufen.
Leiten Sie hieraus eine Beziehung zwischen den Übergangsquoten v und w der Matrix R aus (1) her.
[Zur Kontrolle: $w = \frac{2}{3}v + \frac{1}{6}$]
Untersuchen Sie, ob die Beziehung zwischen v und w zu einer Einschränkung des Definitionsbereichs von w bzw. v führt.