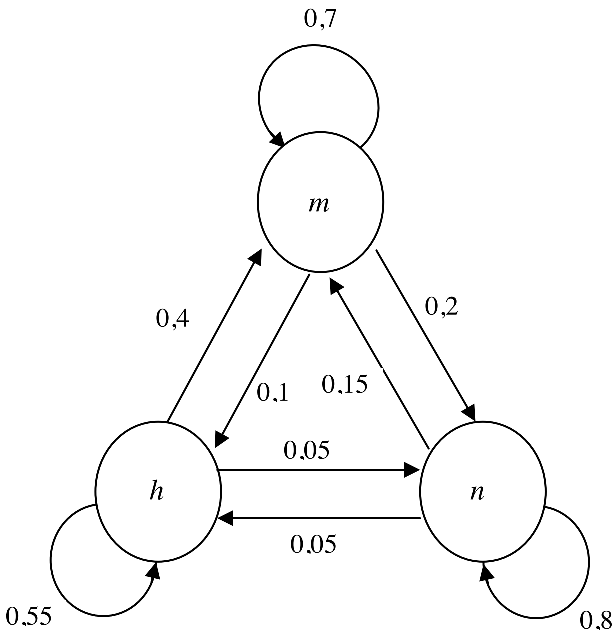
Abiklausur Hamburg 2008, LK: Einkommensgruppen

Die Familien eines fiktiven Landes werden einer der drei angegebenen Einkommensgruppen zugeordnet. In statistischen Erhebungen hat man festgestellt, dass Kinder der Eltern einer bestimmten Einkommensgruppe nach ihrer Ausbildung auch einer anderen Einkommensgruppe angehören können.
Es wird angenommen, dass 10 % der Einkommensgruppe hoch (h), 60 % der Einkommensgruppe mittel (m) und 30 % der Einkommensgruppe niedrig (n) angehören. Vereinfachend wird angenommen, dass jede Familie genau zwei Kinder hat und in der nächsten Generation jedes Kind mit einem Kind einer anderen Familie wieder eine Familie gegründet hat.

a) Es werden 4200 Familien nach repräsentativen Grundsätzen ausgewählt.
Berechnen Sie die Anfangsverteilung $\vec{p}_0$ der ausgewählten Bevölkerungsgruppe. **5 P**

Die nachfolgende Abbildung gibt für jede Einkommensgruppe an, welche Anteile dieser Gruppe von einer Generation zur nächsten die Gruppe wechseln bzw. in der Gruppe bleiben.



$$P = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 8 & 14 & 3 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

b) Begründen Sie anhand des Graphen, dass dieser Prozess durch die Übergangsmatrix P beschrieben werden kann und berechnen Sie die Einkommensverteilung $\vec{p}_1$ in der nächsten Generation. **20 P**

c) Ermitteln Sie die Einkommensverteilung $\vec{p}_{-1}$ der Elterngeneration der ersten Gruppe.
Setzen Sie dabei voraus, dass obiges Modell auch schon bei dieser Generation galt. **20 P**

Nach einigen Jahren stellt man fest, dass Eltern der hohen Einkommensgruppe durchschnittlich nur ein Kind bekommen, in der mittleren Einkommensgruppe dagegen zwei Kinder und in der niedrigen Einkommensgruppe drei Kinder geboren werden.

d) Ermitteln Sie die modifizierte Übergangsmatrix und begründen Sie Ihre Vorgehensweise. **15 P**

(*Hinweise:*
Überlegen Sie, welche Matrixelemente jeweils die Entwicklung einer Gruppe repräsentieren.

Kontrollergebnis: $P_{Mod} = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 & 3 \\ 8 & 28 & 9 \\ 1 & 8 & 48 \end{pmatrix}$)

e) Berechnen Sie die Einkommensverteilung in den nächsten beiden Generationen.
Vergleichen Sie das modifizierte Modell hinsichtlich der Entwicklung der Gesamtzahl der Familien mit dem ursprünglichen Modell. **20 P**

Bei einigen Populationsmatrizen A erhält man die Einheitsmatrix E durch Mehrfachmultiplikation der Matrix A mit sich selbst, also $A^n = E$ *für bestimmte* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Die Einheitsmatrix E erhält man aber auch durch Multiplikation der Matrix A mit ihrer „inversen Matrix“ A^{-1}, sofern diese existiert, also $A \cdot A^{-1} = E$.

Gegeben ist nun die allgemeine Populationsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$.

f) Bestimmen Sie die Matrizen A^2 und A^3 und ermitteln Sie die Bedingungen für a, b und c, damit gilt: $A^3 = E$.
Interpretieren Sie für diesen Fall die Bedeutung der Matrix A^2. **15 P**

g) Interpretieren Sie dieses Phänomen für die Entwicklung einer zugehörigen Population. **5 P**