# Reisebüro

**LK-Klausur zum Thema Matrizen**

Ein Reisebüro pflegt eine Datei mit Adressen von 4400 langjährigen Stammkunden, die ihren Urlaub über dieses Reisebüro buchen. Zum Ende eines jeden Jahres untersucht die Geschäftsleitung das Buchungsverhalten der Kunden im Hinblick auf die Anzahl der Urlaube, die die Kunden im abgelaufenen Jahr bei dem Reisebüro gebucht haben.

Dabei wird unterschieden zwischen den Kunden, die im abgelaufenen Jahr genau einen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe E), Kunden, die im abgelaufenen Jahr mehr als einen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe M), und Kunden, die im abgelaufenen Jahr keinen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe K).

a) Die Geschäftsleitung hat festgestellt, dass das Buchungsverhalten der Stammkunden während eines Jahres vom Buchungsverhalten im vorangegangenen Jahr abhängt. So wurde in früheren Jahren von folgendem Buchungsverhalten der Stammkunden bei dem Reisebüro ausgegangen:

- Von den Kunden der Gruppe E eines Jahres buchen im folgenden Jahr 75 % ebenfalls genau einen Urlaub; 10 % der Gruppe buchen mehr als einen Urlaub und 15 % keinen Urlaub.
- Von den Kunden, die in einem Jahr mehr als einen Urlaub gebucht haben, buchen 60 % im Folgejahr ebenfalls mehr als einen Urlaub, 20 % buchen genau einen Urlaub und 20 % buchen keinen Urlaub.
- 57 % der Kunden der Gruppe K buchen bei dem Reisebüro im nächsten Jahr genau einen Urlaub, 28 % sogar mehr als einen Urlaub, während 15 % auch im Folgejahr keinen Urlaub bei dem Reisebüro buchen.

Dabei wird vereinfachend davon ausgegangen, dass sich die Stammkundschaft im Laufe der Zeit nicht ändert.

**Stellen** Sie dieses Buchungsverhalten durch ein Übergangsdiagramm **dar** und **bestimmen** Sie eine Übergangsmatrix, die dieses Verhalten beschreibt. **(10 P)**

b) Aufgrund einer Änderung des Urlaubsverhaltens gilt aktuell bei weiterhin konstanter Anzahl von Stammkunden die folgende Übergangsmatrix A:

$$\begin{array}{r|l} & \textit{von: } E \quad M \quad K \\ \hline \textit{nach: } E & \\ M & \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \\ K & \end{array}$$

(1) **Geben** Sie drei Änderungen im Buchungsverhalten **an**, die gegenüber den früheren Jahren erkennbar sind.

Im Jahr 2011 buchten 2624 Kunden genau einen Urlaub, 1206 Kunden buchten mehr als einen Urlaub, während 570 Kunden keine Buchung bei dem Reisebüro durchführten.

(2) **Bestimmen** Sie unter den Übergangsbedingungen, die durch die Matrix A gegeben sind, die zu erwartende Verteilung für das Jahr 2012.

(3) **Bestimmen** Sie unter den Übergangsbedingungen, die durch die Matrix A gegeben sind, die Verteilung für das Jahr 2010. **(14 P)**

c) Durch gezielte Werbemaßnahmen wird während des Jahres 2012 das Buchungsverhalten der Kunden der Gruppe K so beeinflusst, dass von diesem Jahr an jeweils gegenüber dem vorangegangenen Jahr nur noch 5 % der Kunden der Gruppe K keinen Urlaub buchen. Dabei wird das Buchungsverhalten der Kunden der beiden anderen Kunden- gruppen E und M nicht beeinflusst. Es wird weiterhin von einer konstanten Anzahl von Stammkunden ausgegangen.

(1) **Erklären** Sie, dass das Buchungsverhalten dann durch eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & q \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}95 - q \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq q \leq 0{,}95$$

beschrieben werden kann.

(2) Gehen Sie von den in Teilaufgabe b) für das Jahr 2011 angegebenen Buchungen aus und **ermitteln** Sie den Wert von q für den Fall, dass sich am Ende des Jahres 2012 herausstellt, dass 2699 Kunden im Jahr 2012 genau einen Urlaub gebucht haben.

(3) **Untersuchen** Sie, wie viele Buchungen das Reisebüro bei einem Übergangsverhalten, wie es unter c) (1) beschrieben ist, für das Jahr 2012 mindestens erwarten kann. Gehen Sie dabei von den in Teilaufgabe b) für das Jahr 2011 angegebenen Buchungszahlen aus. **(14 P)**

d) Ein Unternehmensberater schlägt ein neues Berechnungsmodell vor: Demnach soll das Buchungsverhalten innerhalb eines Jahres in Abhängigkeit vom Buchungsverhalten des Vorjahres durch folgende Gleichung modelliert werden:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet x die Anzahl der Kunden, die im Vorjahr genau einen Urlaub gebucht haben, y die Anzahl der Kunden, die im Vorjahr mehr als einen Urlaub gebucht haben, und z die Anzahl der Kunden, die im Vorjahr keinen Urlaub gebucht haben. x′ , y′ und z′ bezeichnen die entsprechenden Kundenzahlen für das laufende Jahr.

(1) **Nennen** und **erklären** Sie zwei Aspekte, in denen sich diese Modellierung gegenüber dem Modell aus Teilaufgabe b) (Matrix A) unterscheidet.

(2) **Zeigen** Sie, dass es bei dem durch die voranstehende Gleichung beschriebenen Übergangsverhalten eine Verteilung der Kunden des Reisebüros auf die Gruppen E, M und K so gibt, dass die Anzahl der Kunden der einzelnen Gruppen E, M und K von Jahr zu Jahr gleich bleibt. **Bestimmen** Sie diese Verteilung und **erklären** Sie, durch welche Übergänge zwischen den Gruppen E, M und K diese Verteilung konstant bleibt. **(12 P)**