Spezialthema 3: Hilfsmittelfreier Teil (Teil A / OHimi)

GK- und LK-Klausur aus 2019

1. Aufgabe: GK-Version (empfiehlt sich auch für LK-Schüler!!)

a) Gegeben sind die Funktionen g und h durch die Gleichungen

$$g(x) = x^2 - x + 1 \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ und}$$

$$h(x) = -x^2 - 5x + 1 \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

(1) Zeigen Sie, dass sich die Graphen von g und h nur für $x = -2$ und $x = 0$ schneiden.

(2) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Graphen von g und h einschließen.

(2 + 4 P)

b) Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f\,(x) = x \cdot \mathrm{e}^{2x+2}, x \in \mathbb{R}$.

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung.

Für die zweite Ableitung von f gilt: $f\,''(x) = (4x + 4) \cdot \mathrm{e}^{2x+2}$

(2) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.

(Hinweis: Auf den Nachweis einer hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden.)

(3 + 3 P)

c) In einer Urne befinden sich drei rote und sieben weiße Kugeln.

(1) Zweimal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens eine der entnommenen Kugeln weiß ist.

(2) Zehnmal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der entnommenen weißen Kugeln. Begründen Sie ohne Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, dass keine der folgenden Abbildungen 1 und 2 die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X darstellt.

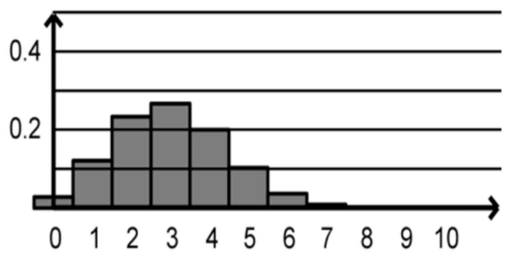


Abbildung 1

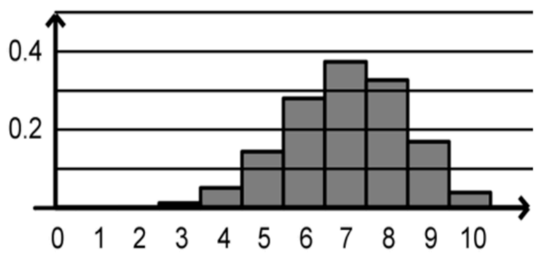


Abbildung 2

(3 + 3 P)

d) In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|2|2)$, $B(4|-1|z)$ und $C(-3|y|6)$ mit $y, z \in \mathbb{R}$ gegeben.

(1) B liegt auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}75 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Wert von z.

(2) Zeigen Sie, dass der Abstand von A und C mindestens 5 beträgt.

(3 + 3 P)

2. Aufgabe: LK-Version (empfiehlt sich auch für GK-Schüler!!)

a) Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{-x+2}, x \in \mathbb{R}.$$

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung. (Kontrolllösung: $f'(x) = (-\frac{1}{2}x^2 + x) \cdot e^{-x+2}$)

(2) Ohne Nachweis kann im Folgenden benutzt werden, dass $f''(x) = (\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x+2}$ gilt.

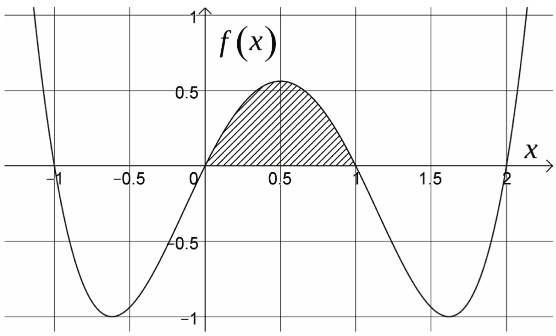
Weisen Sie nach, dass ein lokaler Hochpunkt existiert und geben Sie die Koordinaten des Hochpunktes an.

(2 + 4 P)

b) Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}.$$

In der Abbildung ist der Graph der Funktion f dargestellt.



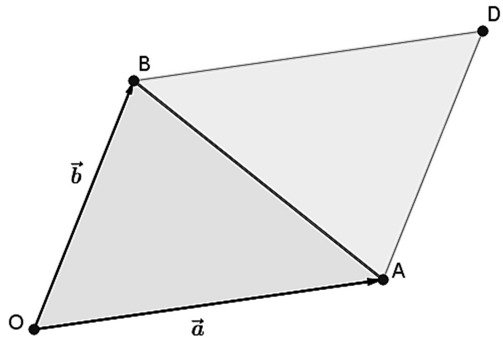
(1) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche. Die Nullstellen von f dürfen Sie dabei in der Abbildung ablesen.

(2) Der Graph der Funktion f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Der Inhalt dieser Fläche soll durch einen Term beschrieben werden. Entscheiden Sie für jeden der folgenden Terme A, B und C, ob er dazu geeignet ist oder nicht.

$A: \int_{-1}^{2} |f(x)| dx$ $\qquad$ $B: \left| \int_{-1}^{2} f(x) dx \right|$ $\qquad$ $C: -\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{2} f(x)dx$

(3 + 3 P)

c) Die Punkte $\mathrm{O}(0|0|0)$, $\mathrm{A}(4|2|-2)$ und $\mathrm{B}(16|2|-14)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks. In der Abbildung wird das Dreieck OAB mithilfe eines Punktes D zu einem Parallelogramm $OADB$ ergänzt. Es ist $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.



(1) Geben Sie die Koordinaten des Punktes D an.

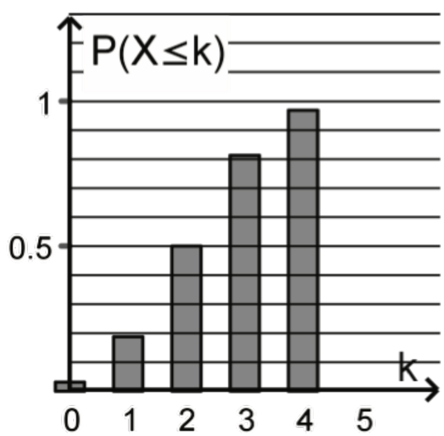
Das Dreieck OAB besteht aus den Punkten des Randes und allen Punkten im Inneren. Das Dreieck OAB ist bestimmt durch die Gleichung

$$\vec{x} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad r + s \leq 1, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

(2) Prüfen Sie, ob der Punkt P mit $\mathrm{P}(14|2{,}5|-11{,}5)$ ein Punkt des Dreiecks ist.

(2 + 4 P)

d) Die Abbildung rechts zeigt kumulierte Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit dem Parameter $n = 5$.



(1) Zeichnen Sie in die Abbildung den zu $k = 5$ gehörenden Wert ein und ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X den Wert 2 annimmt.

(2) Betrachtet wird eine binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern $n = 5$ und $p > 0$. Es gilt: $P(Y = 4) = 10 \cdot P(Y = 5)$. Berechnen Sie den Wert von p.

(3 + 3 P)